

# Mutlak Konik ve Kamera Kalibrasyonu

Kaçış Noktaları Üzerinden  
K Matrisinin Geometrik ve  
Cebirsel Çıkarımı





# Metrik Dünyayı Geri Kazanmak: Temel Problem

Projektif Uzay

Projektif uzaydan (görüntü) Öklid uzayına (gerçeklik) geçiş yapmak için kameranın iç parametrelerini (**K**) bilmemiz gerekir.

*“Fiziksel bir kalibrasyon objesi (dama tahtası) olmadan bu geçişi nasıl sağlarız?  
Cevap sonsuzlukta gizli.*

Öklid Uzayı



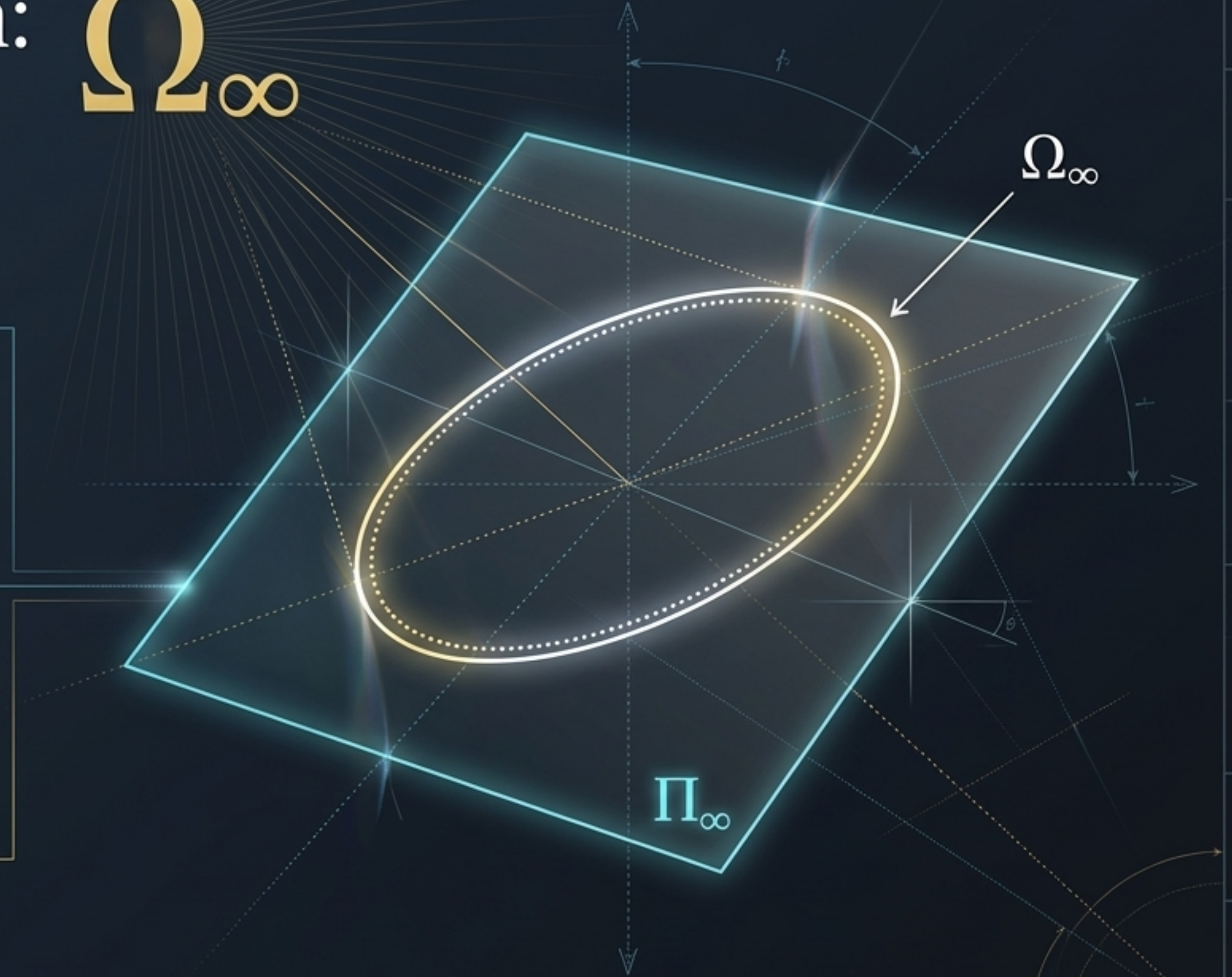
# Sonsuzluktaki Hakem: Mutlak Konik

$\Omega_\infty$

$\mathbb{P}^3$  projektif uzayında metrik özellikler (açılar ve göreceli uzunluklar) Mutlak Konik ( $\Omega_\infty$ ) tarafından benzersiz şekilde belirlenir.

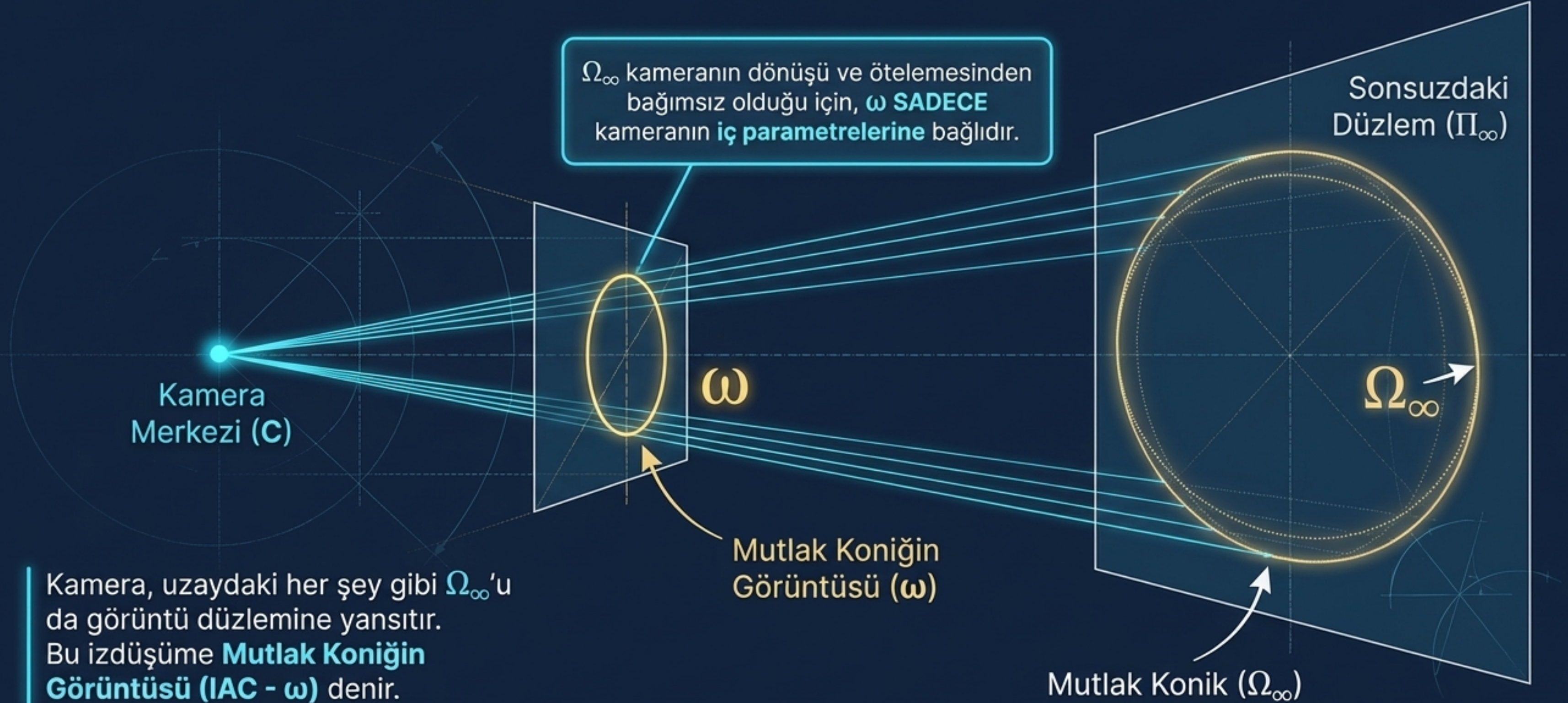
Sonsuzdaki düzlemde ( $\Pi_\infty$ ) yer alan tamamen sanal (imaginary) bir nokta koniğidir.

**En kritik özelliği:** Benzerlik dönüşümlerine (similarity transformations) karşı değişmezdir (invariant). Uzay nasıl dönerse dönsün,  $\Omega_\infty$  sabit kalır.





# Mutlak Koniğin Görüntüsü (IAC, $\omega$ )





# Cebirsel Köprü: Matematiğin Kilidi ve Anahtarı

$$\mathbf{P} = \mathbf{K}[\mathbf{R} \mid \mathbf{t}]$$

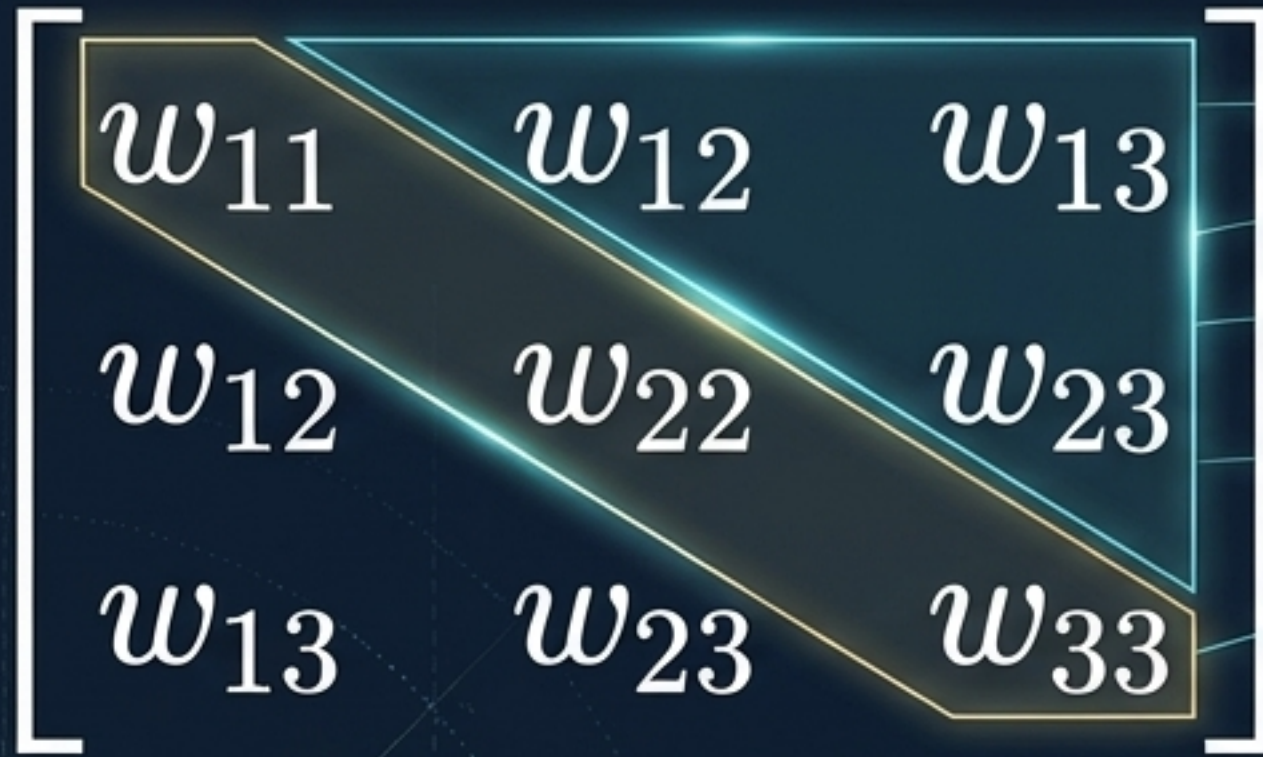
$$\boldsymbol{\omega} = (\mathbf{K}\mathbf{K}^T)^{-1} = \mathbf{K}^{-T}\mathbf{K}^{-1}$$

Görüntü üzerinden  $\boldsymbol{\omega}$  matrisini ölçebilirsek, kalibrasyon matrisi  $\mathbf{K}$ 'yı tamamen tersine mühendislikle elde edebiliriz.

$\boldsymbol{\omega}$  matematiksel kilit,  $\mathbf{K}$  ise anahtardır.



# $\omega$ Matrisinin Anatomisi: 5 Serbestlik Derecesi


$$\begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{12} & w_{22} & w_{23} \\ w_{13} & w_{23} & w_{33} \end{bmatrix}$$

$\omega$ ,  $3 \times 3$  boyutunda simetrik bir matristir. Ölçek (scale) projektif uzayda keyfi olduğundan, tam olarak 5 serbestlik derecesine (Degrees of Freedom) sahiptir.

Bu 5 bağımsız değer,  $\mathbf{K}$  matrisindeki 5 bilinmeyenle doğrudan eşleşir:

- $f_x, f_y$ : Odak uzaklıkları
- $u_0, v_0$ : Asal nokta (Principal point)
- $s$ : Çarpıklık (Skew)



# Görüntü Düzlemine Gömülü Geometrik İletki

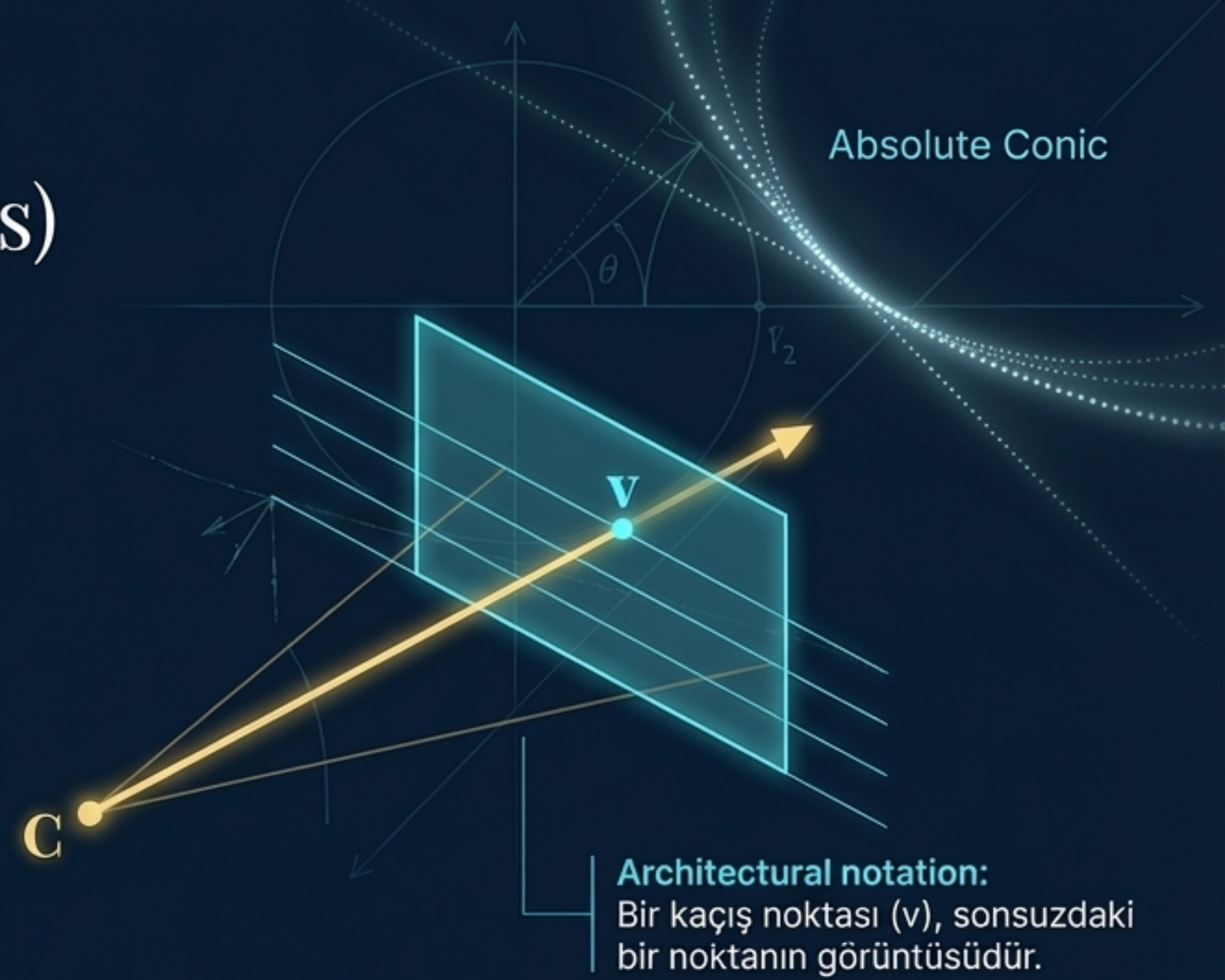


$$\cos \theta = \frac{x_1^T \omega x_2}{\sqrt{x_1^T \omega x_1} \sqrt{x_2^T \omega x_2}}$$

$\omega$ , görüntü noktalarından geri yansıtılan (back-projected) herhangi iki ışın arasındaki açıyı tanımlar. Piksel uzayında görünmez bir "iletke" (protractor) görevi görür.



# Gözlemlenebilir İpuçları: Kaçış Noktaları (Vanishing Points)



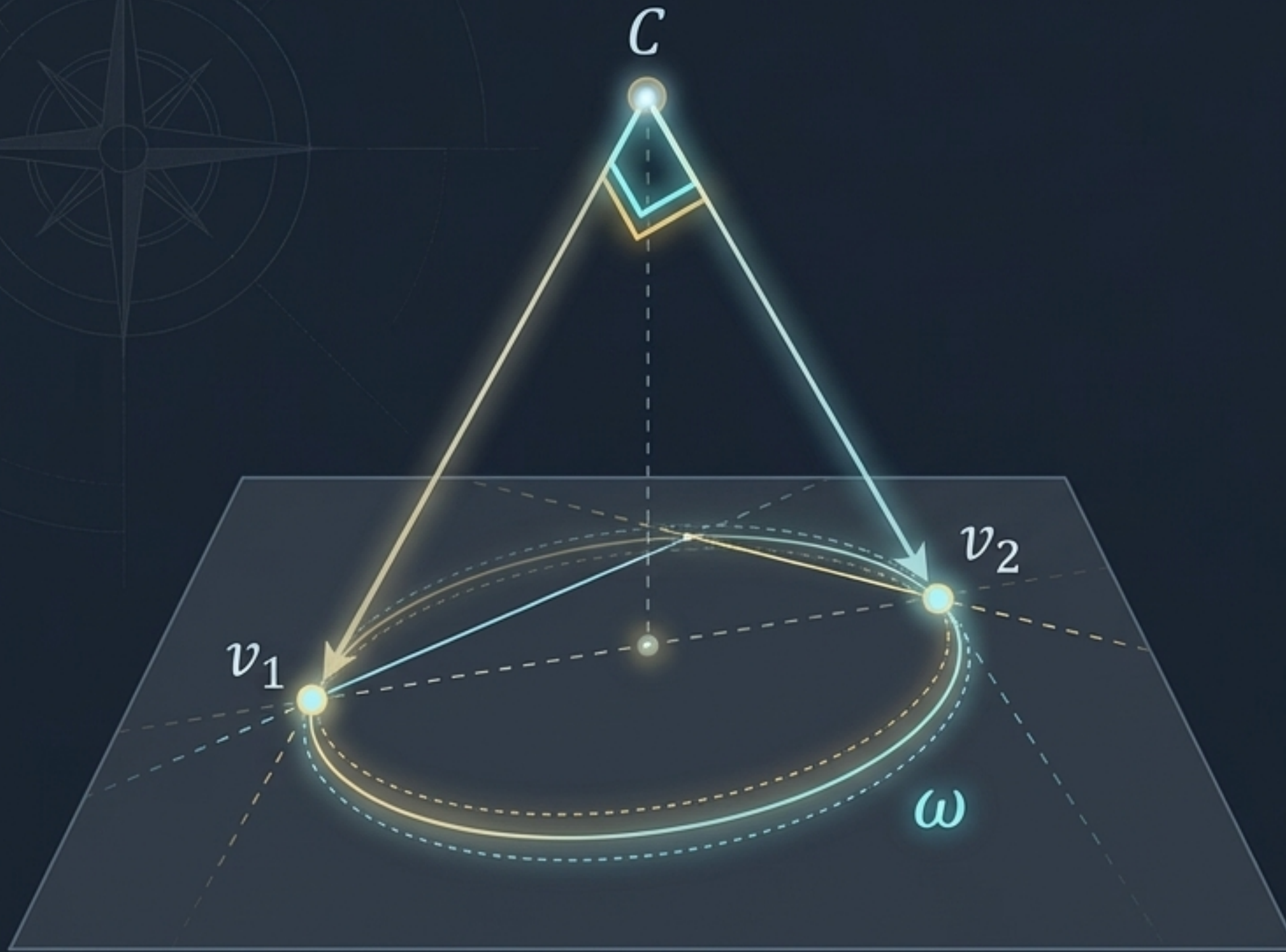
**Architectural notation:**  
Bir kaçış noktası (v), sonsuzdaki  
bir noktanın görüntüsüdür.

Kamera merkezinden (C) kaçış noktasına (v) doğru geri yansıtılan ışın, sahnedeki o paralel doğruların 3B uzaydaki kesin yönünü verir:

$$\mathbf{d} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{v}.$$



# Diklik Şartı (The Orthogonality Condition)



Eğer 3B sahnedeki doğrular birbirine dik ise ( $\theta = 90^\circ$ ), o zaman  $\cos \theta = 0$  olur.

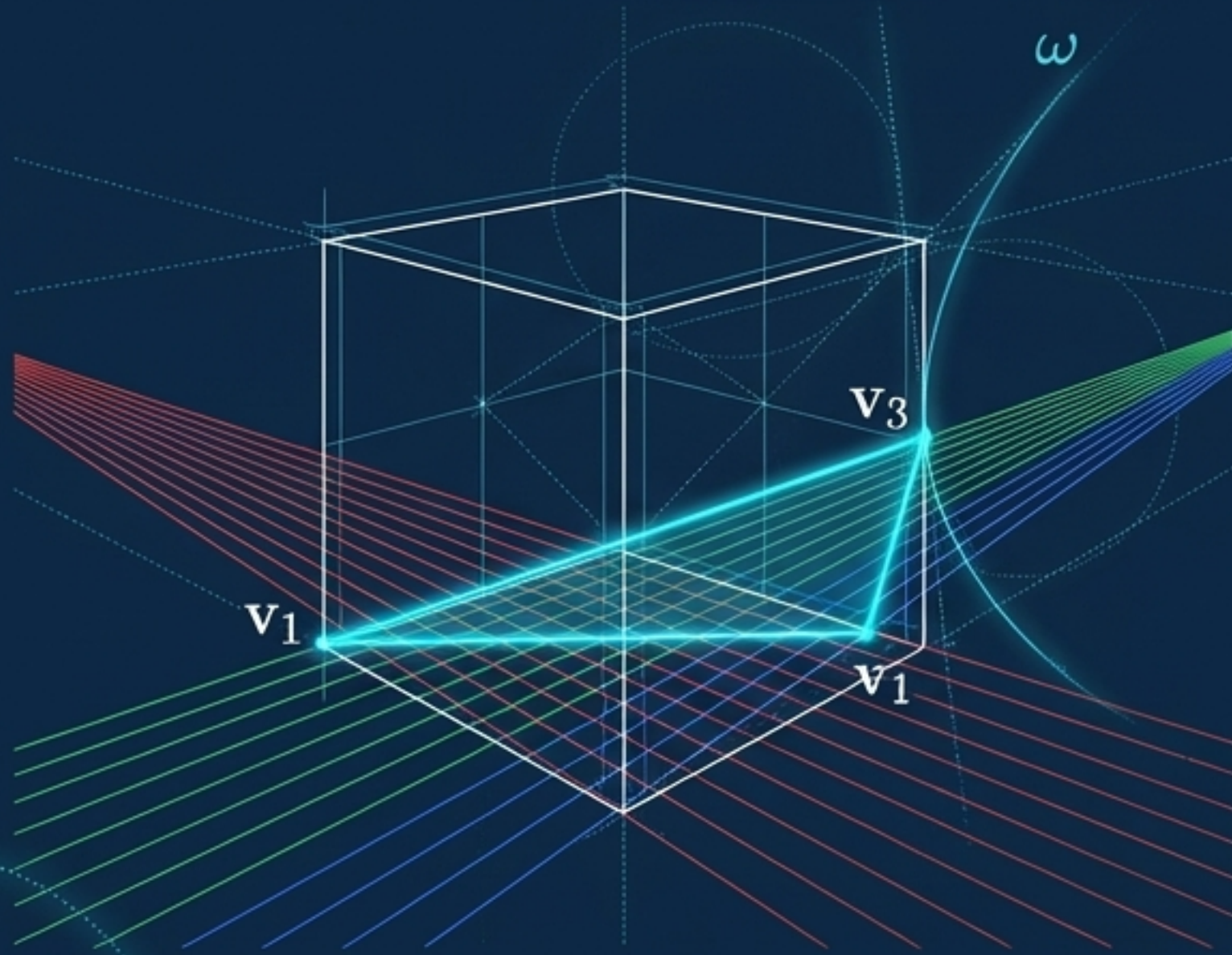
İletki formülümüzü sıfıra eşitlediğimizde **temel kısıtlamayı** elde ederiz:

$$v_1^T \omega v_2 = 0$$

Geometrik olarak,  $v_1$  ve  $v_2$  kaçış noktaları,  $\omega$ 'ya göre eşleniktir (conjugate).



# Üçlü Dik Doğrultular (Triad of Orthogonal Vanishing Points)



İnsan yapımı sahneler genellikle birbirine dik üç ana doğrultu (bir binanın X, Y, Z eksenleri) içerir. Bu durum, bize 3 çift dik kaçış noktası sağlar.

$$1. \mathbf{v}_1^T \omega \mathbf{v}_2 = 0$$

$$2. \mathbf{v}_1^T \omega \mathbf{v}_3 = 0$$

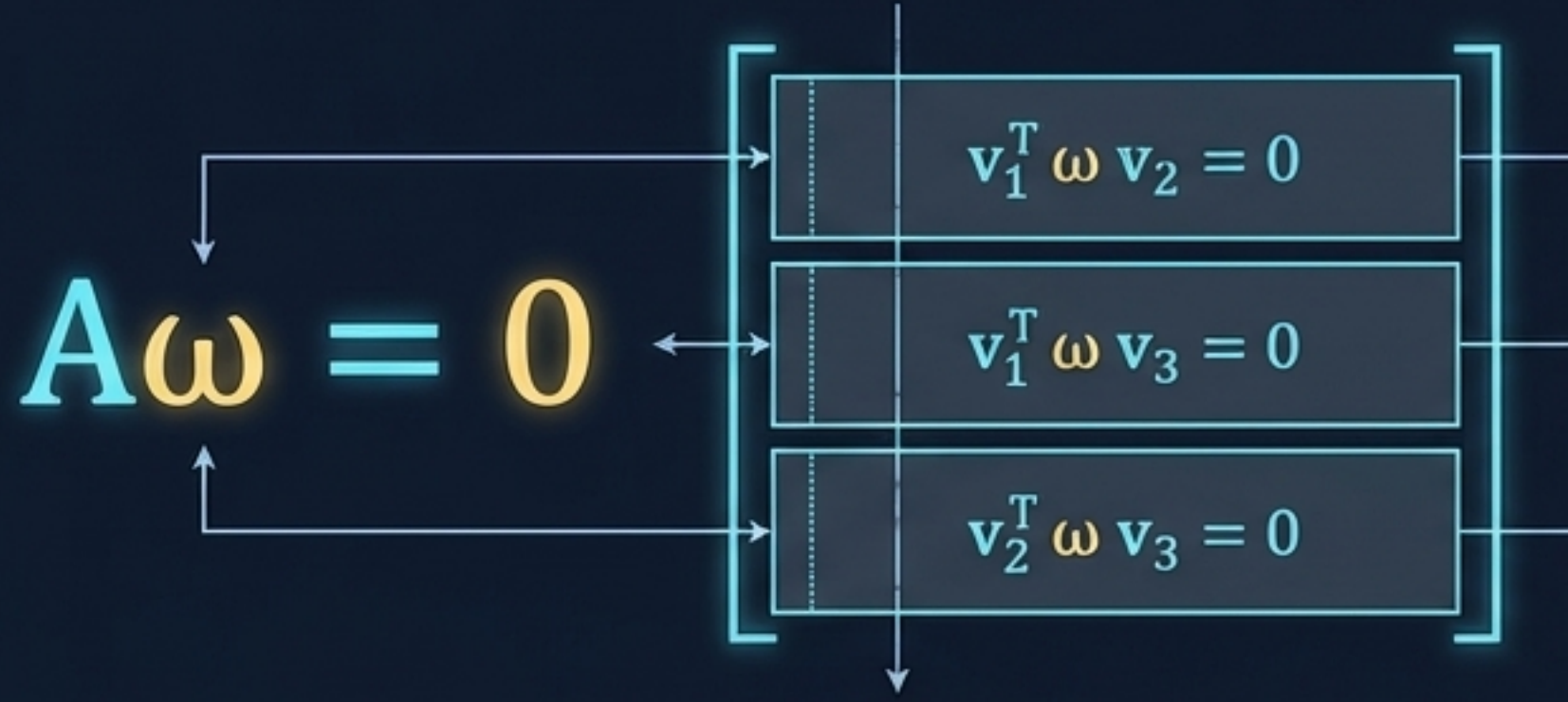
$$3. \mathbf{v}_2^T \omega \mathbf{v}_3 = 0$$

Bu sistem,  $\omega$ 'nın 5 serbestlik derecesi üzerinde 3 doğrusal kısıt (linear constraint) sağlar.



# Matrisi Sınırlandırmak: $A\omega = 0$ Sistemi

Heroic matrix visualizannation from its previous slide.



Üçlü dik doğrultulardan 3 kısıt elde ettik.  
5 serbestlik derecesini (DoF) çözmek için  
2 kısıta daha ihtiyacımız var.

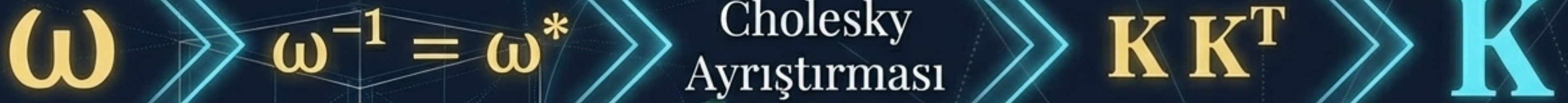
## Pratik Varsayımlar

- Modern kameralar için yaygın ve güvenilir varsayımlar:
  - Sıfır Çarpıklık (Zero skew):  $s = 0$
  - Kare Pikseller (Square pixels):  $f_x = f_y$

Bu varsayımlar  $\omega$ 'nın DoF'unu 3'e düşürür. Artık üçlü dik doğrultular,  $\omega$ 'yı ölçeğe kadar (up to scale) çözmek için tam olarak yeterli bilgiyi sağlar!



# K Matrisinin Kilidini Açmak: Cholesky Ayırıştırması



Doğrusal sistemi çözerek  $\omega$ 'yı elde ettikten sonra, Mutlak Koniğin Çift Görüntüsünü (DIAC) bulmak için tersini alırız:  $\omega^* = \omega^{-1} = K K^T$ .

$\omega^*$  pozitif tanımlı (positive definite) ve simetrik bir matris olduğundan, Cholesky Ayırıştırması uygulanabilir.

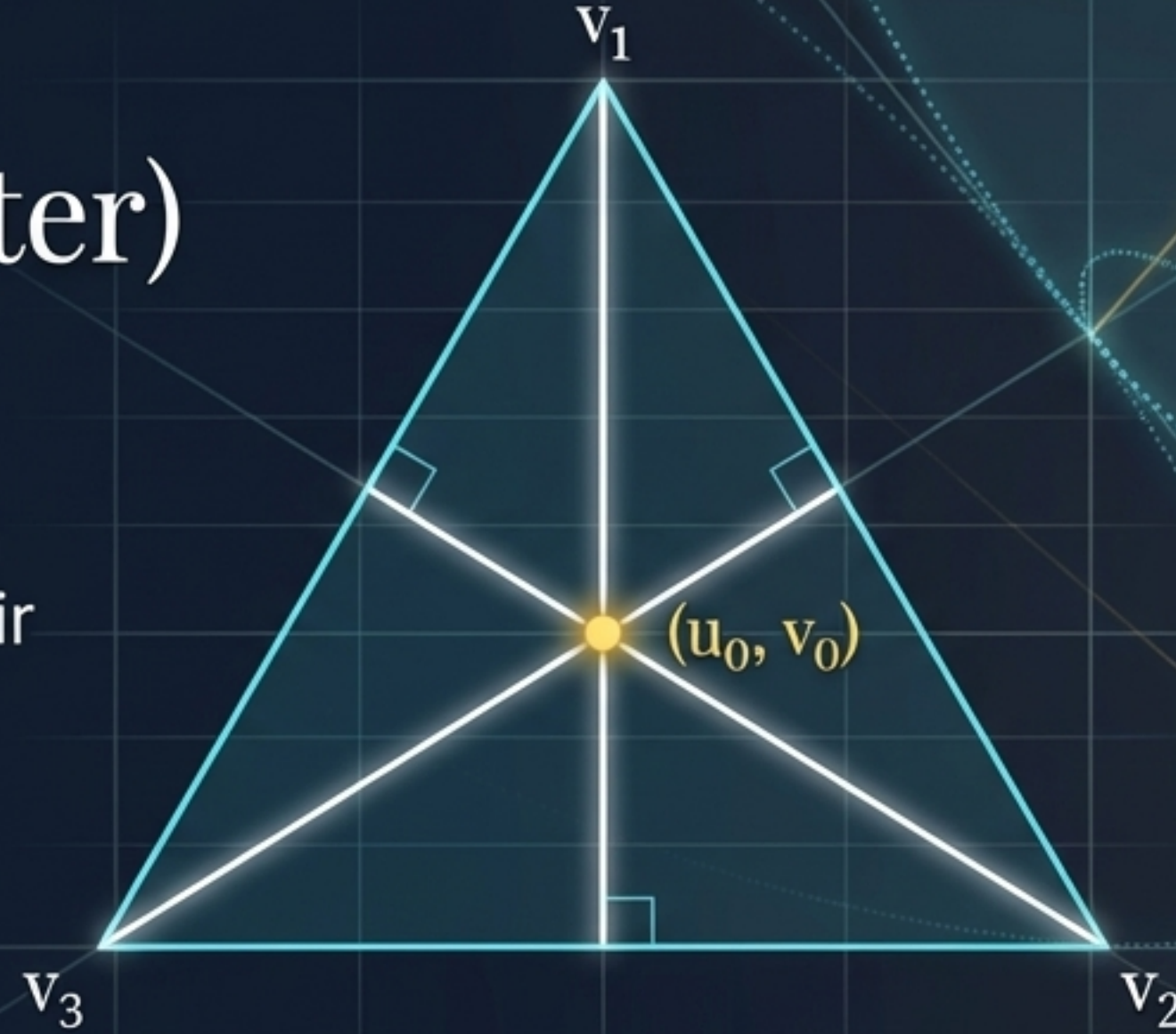
Bu işlem,  $\omega^*$ 'ı benzersiz bir şekilde üst üçgensel matris  $K$  ve devriği  $K^T$  olarak çarpanlarına ayırır.

Kalibrasyon tamamlandı!



# Geometrik Yorum: Diklik Merkezi (The Orthocenter)

Kare piksellere ve sıfır çarpıklığa sahip bir kamera için matematik muazzam bir geometrik gerçeği ortaya çıkarır:



Asal nokta (Principal point,  $u_0, v_0$ ), üç dik kaçış noktasının oluşturduğu üçgenin tam olarak diklik merkezidir (orthocenter).

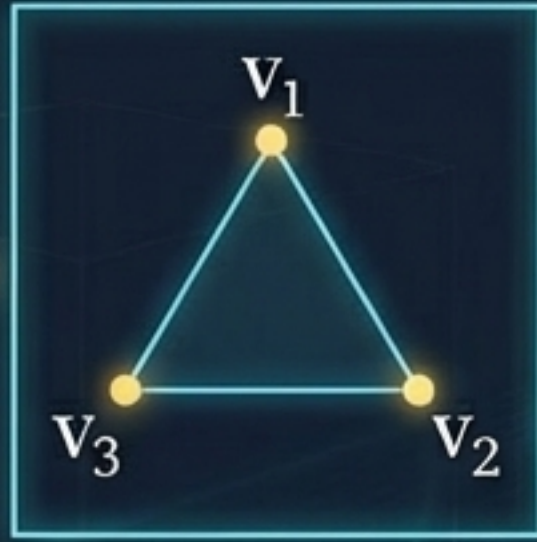


# Uçtan Uca Kalibrasyon: İş Akış İlişkisi (Pipeline)



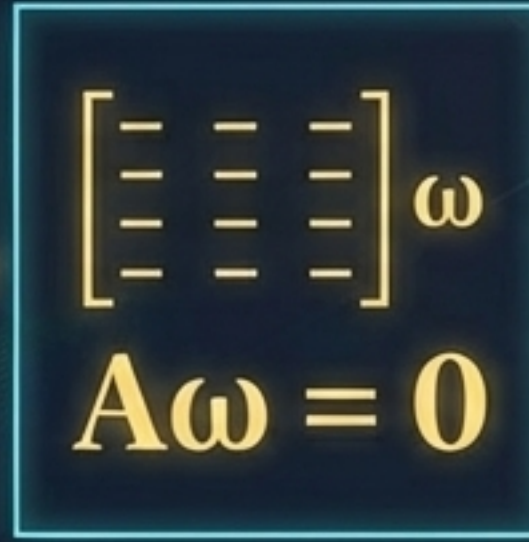
## Öznitelik Çıkarımı

Görüntüdeki paralel doğru parçalarının tespiti.



## Kaçış Noktaları

Üçlü dik doğrultuların ( $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ ) hesaplanması.



## Optimizasyon

Varsayımlar kullanılarak  $\mathbf{A}\omega = \mathbf{0}$  sisteminin kurulması ve çözülmesi.



## Cholesky Ayırıştırması

Simetrik matristen  $\mathbf{K}$ 'nin çıkarımı.



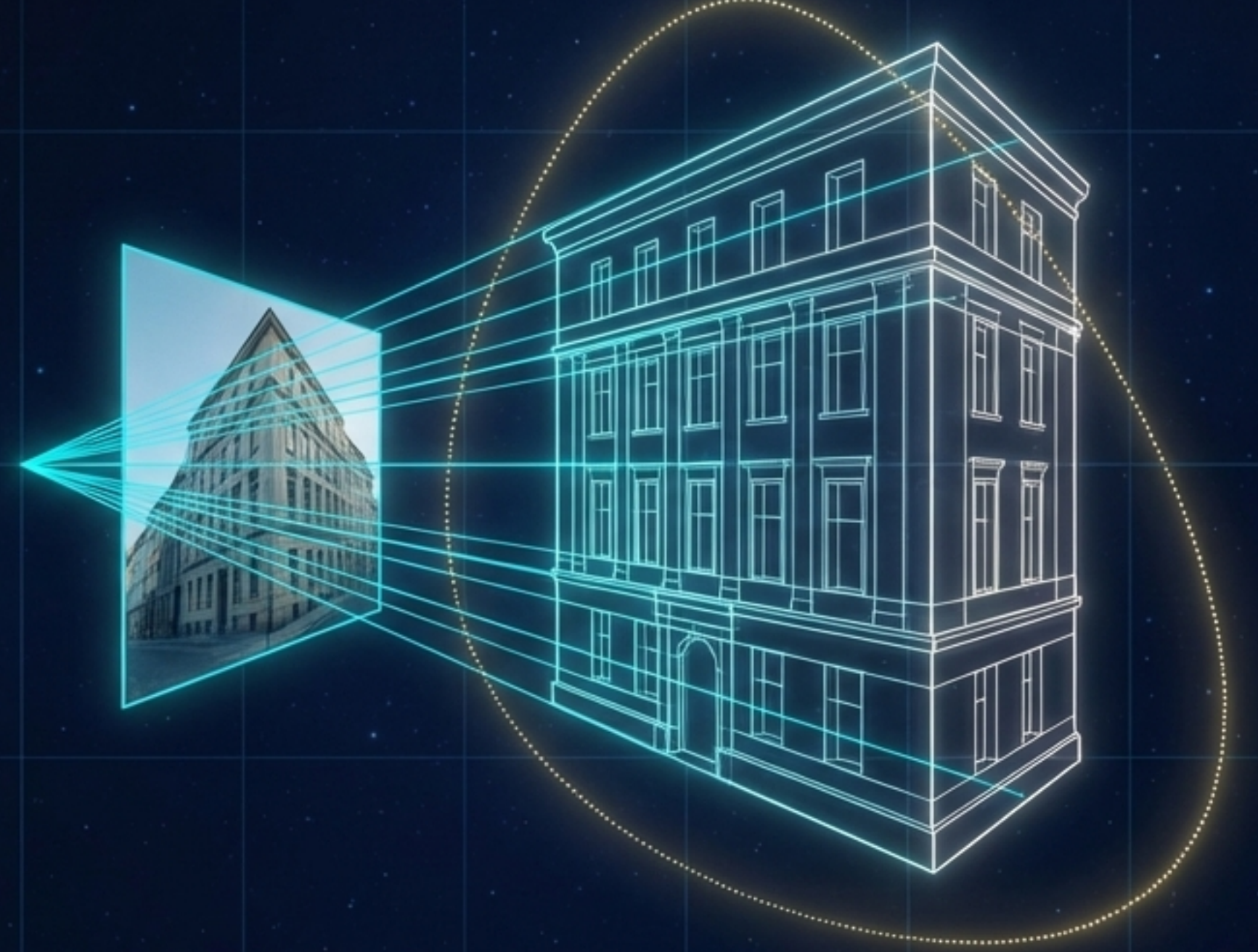
## Dengeleme (Bundle Adjustment)

Tüm doğrular üzerinden yeniden yansıtma hatasının (reprojection error) en aza indirilerek  $\mathbf{K}$ 'nin doğrusal olmayan optimizasyonu.



# Sonuç: Görüntüdeki Öklid Gerçekliği

- Projektif geometri, fiziksel kalibrasyon hedefleri olmadan Öklid gerçekliğini çıkarmamıza olanak tanır.
- Mutlak Konik ( $\Omega_\infty$ ) ve onun görüntüsünü ( $\omega$ ) anlayarak, dünyanın ham yapısını (dik doğrular), kameranın matematiksel merceğine ( $\mathbf{K}$ ) dönüştürüyoruz.



*Görünenin ardındaki geometri, sonsuzluğun izlerini taşır.*